



Информация за изпълнение на етап на проект

Наименование на конкурса:
Конкурс за финансиране на научни изследвания – 2017 г.
Основна научна област:
Математически науки и информатика.
№ на договор:
ДН/12/3/12.12.2017
Начална и крайна дата на проекта:
12.12.2017 – 11.12.2020
Заглавие на проекта:
Геометрия и анализ на ЧДУ, специални холономии и суперсиметрични струни.
Базова организация:
Софийски Университет “Св. Кл. Охридски”
Партньорски организации:
Ръководител на научния колектив (академична длъжност, научна степен, име):
Професор д.м.н. Стефан Иванов
Общ размер на отпуснатото финансиране за първи етап:
50 000,00 лева
Интернет страница на проекта (ако има такава):
Научни публикации по проекта:
[BI] D. Barilari, S. Ivanov, “A sub-Riemannian Bonnet-Myers theorem for quaternionic contact structures”, Calculus of Variations and PDE, (2019) 58: 37, https://doi.org/10.1007/s00526-018-1467-y .
[IU] S. Ivanov, L. Ugarte, "On the Strominger system and holomorphic deformations", The Journal of Geometric Analysis, (2019), 1-19. DOI 10.1007/s12220-018-0023-5
[IZ] S. Ivanov, M. Zlatanovic “Non-symmetric Riemannian gravity and Sasaki-Einstein 5-manifolds”, arXiv:1905.04013 [math.DG]
[MS] I. Minchev, J. Slovak On the existence of local quaternionic contact geometries, arXiv:1711.09420 [math.DG]
[Z1] S. Zamkovoy “On the geometry of trans-para-Sasakian manifolds”, arXiv:1812.01979 [math.DG]
[Z2] S. Zamkovoy “ON QUASI-PARA-SASAKIAN MANIFOLDS”, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, Tome 72, No 4, 2019, DOI:10.7546/CRABS.2019.04.02



Описание на очакваните резултати по проекта (до 1 стр. в рамките на полето по-долу):

Резултатите и мероприятията в настоящия проект ще имат дълготраен ефект поради научната значимост на разглежданите въпроси, а също така и поради участието на млади изследователи в проекта. Научните резултати от предложената работа ще стимулират редица нови разработки в областта на специалните структури и свързаните с тях σ -модели и теория на струните. Проектът има за цел изучаването на редица аналитични понятия и свързаните с тях геометрични обекти, което също ще доведе до по-добро разбиране на връзките и зависимостите между тези обекти. В този смисъл, предложените изследвания са на границите между геометрията, комплексния анализ и частните диференциални уравнения. Много от изучаваните обекти са интересни също за математическата физика и теорията на струните. Частта на проекта, съсредоточена върху кватернионно-контактните структури, ще е от значение при изучаването на уравнението на Ямабе върху групите на Ивасава. Твърде вероятно е методите, които ще бъдат развити в кватернионно-контактния случай, да доведат до неговото пълно решаване. Например, условието за запазване кк-Айнщайновост може да бъде формулирано без да се използва свързаност, като се използват само ляво инвариантните полета върху съответните групи. Тези полета са паралелни както спрямо свързаността на Танака-Уебстър (в CR случая), така и за свързаността на Бикар (в кватернионно-контактния случай). Ако вземем в предвид, че кватернионно-контактният случай лежи между Римановия и CR геометриите, с всичките усложнения на последната е възможно като резултат да се получи общо решаване на подобните проблеми върху групите на Ивасава или тези от Хайзенбергов тип.

Много важен факт по отношение анализа на ЧДУ върху Карно групи е, че досега няма изградени методи за доказване на симетрии на решения, подобни на "симетризация" или "moving plane". Последните два метода са ключова стъпка към огромно количество резултати в теорията на частните диференциални уравнения. Очакваната "частична" симетрия на решенията на уравнението на Ямабе върху групи от Хайзенбергов тип е добре известен и много труден отворен въпрос, който ще е от полза в много други ситуации (дори върху групата на Хайзенберг). В този смисъл, търсените резултати в рамките на проекта не могат да бъдат доказани с известните за момента методи.

Друга основна задача тук е намирането на неравенства за собствените стойности на суб-Лапласиана и определянето на граничните случаи. Това е важен проблем, възникващ още от класическите работи на Лихнерович и Обата. Нашите изследвания могат да бъдат разглеждани като продължение и обобщение на тези класически резултати.

Друга област, която е засегната в проекта, е свързана с въвеждането на нов, категорен подход в теорията на ЧДУ. В основата му стои понятието „категорно централно многообразие”, което е асоциирано с ЧДУ (поток) от геометрична природа. В резултат на това се дефинира нова неабелева теория на Ходж. Класическата теория на централните многообразия за ЧДУ за момента е (макар и рестриктивна) добре изградена и се явява естествено продължение на теорията на централните многообразия за обикновени диференциални уравнения. Грубо казано, тази теория служи за редукция на размерността на системата (крайна или безкрайна) в околност на бифуркационна точка, при което се запазва геометричната картина на потока. Съществен момент от категорната теория на централните многообразия е асоциирането с дадено ЧДУ на система от ОДУ и категория от представянията на „колчан” (quiver). Това се вижда добре в случая на семистабилни разслоения на Хигс, които, под действието на една специална филтрация (HNS-filtration), генерирана от параболичен поток (потока на Янг–Милс–Хигс), преминават в полистабилни. Самата филтрация е свързана с асимптотиките на определена система ОДУ, която се очаква да е асоциирана със системата ОДУ върху централно многообразие. За момента сме установили аналитично, при някои допълнителни условия, съществуването на централно многообразие за потока на Янг–Милс. Във връзка с категорната теория на централните многообразия възниква и въпросът за изследване поведението на фамилия от централни многообразия, асоциирана с фамилия от компактни криви (или по-общо, компактни Келерови многообразия) около особеност под действието на монодромия. Тези въпроси са все още в начална фаза и се очаква да поставят основите на нова и богата геометрична теория.



Членове на научния колектив

Организации/участници¹	Бележка²
Базова организация:	
Софийския университет „Св. Климент Охридски“	
Ръководител на научния колектив	
Професор д.м.н. Стефан Иванов	
Участници:	
1. доц. д-р Иван Минчев 2. доц. д-р Симеон Замковой 3. гл. ас. д-р Александър Петков (млад учен)	
Партньорска организация:	
Участници:	
Партньорска организация:	
Участници:	
Партньорска организация:	
Участници:	

¹ Отбележете академичната длъжност, научната степен, име и фамилия на всеки участник като включите и участниците, които са работили по проекта не през целия период за изпълнение на проекта

² Отбележете дали участникът в колектива е млад учен (МУ), постдокторант (ПД), докторанти (ДО) или студенти (СТ), или учен от чужбина (УЧ).



Постигнати резултати от изпълнението на проекта и кратък анализ на тяхната приложимост (до 1 стр. в рамките на полето по-долу)

В [BI] е установено, че пълно спрямо естествената суб-Риманова метрика кватернионно-контактно многообразие с размерност по-голяма от 7, удовлетворяващо естествени условия за положителност на тензора на Ричи, които се изразени в термините на производни до трети ред на структурните тензори, е компактно кк-многообразие и е дадена оценка отгоре за суб-Римановия му диаметър, което е топологичен резултат от тип на Боне-Майерс за кватернионно-контактни многообразия с размерност по-голяма от 7.

В теория на струните системата на Стромингер задава условията хетеротичната струнна теория да бъде суперсиметрична, като идеята е да се получи единна теория, подобна на Айнщайновата обща теория на гравитацията, включваща силите в природата. В [IU] е доказано, че съществуването на решения на системата на Стромингер в размерност 6 при наличие на допълнителни сили е условие, което не е нито отворено, нито затворено при холоморфни деформации.

Несиметричната гравитационна теория на Айнщайн и Джон Мофат е версия на класическата гравитационна теория, предлагаща обяснения на загадката за „тъмната материя“. За разлика от Общата теория на относителността на Айнщайн, тук, вместо един базов симетричен тензор, характеризиращ гравитационното поле, се разглежда обобщен метричен тензор, имащ както симетрична, така и кососиметрична част ($G=g+F$), който следва да удовлетворява определено диференциално уравнение, познато като условие на Айнщайн. В [IZ] се изследват свързаности с напълно кососиметрична торзия, удовлетворяващи условието на Айнщайн, като се показва, че тяхното съществуване върху почти контактно метрично многообразие е еквивалентна на D-хомотетичност на това многообразие до косимплектично такова. В [IZ] се показва още, че съществуването на свързаност с напълно кососиметрична торзия върху 5-мерно многообразие, удовлетворяващо условието на Айнщайн, е еквивалентно на съществуването на Сасаки-Айнщайн структура върху това многообразие.

В [MS] се използва Картан-Келер теорията, за да се докаже съществуването на локални кватернионно-контактни структури с произволно зададени предварителни стойности на техните кривини и ковариантни производни в произволна точка. Показва се още, че различните (с точност до дифеоморфизъм) кватернионно-контактни структури в размерност $4n+3$ зависят от $2n+2$ реални функции на $2n+3$ променливи.

В [Z1] се изследва геометрията на транс-пара-Сасакиевите структури, които са аналог на транс-Сасакиевите многообразия в Римановата геометрия. Изследвана е тяхната кривина и са дадени условия, при които те задават ета-Айнщайн структури.

В [Z2] се характеризирани квази-пара-Сасакиевите структури, чрез различни тензорни уравнения. Показва се, че конформно-плоските квази-пара-Сасакиеви многообразия са пространства с постоянна отрицателна кривина. Показано е още, че 3-мерните квази-пара-Сасакиеви многообразия, имащи ета-паралелен Ричи тензор, са пространства с потоянна скаларна кривина.